

Síkbeli csuklós szerkezetek kiegyensúlyozásának néhány kérdése

DR. BENKŐ JÁNOS

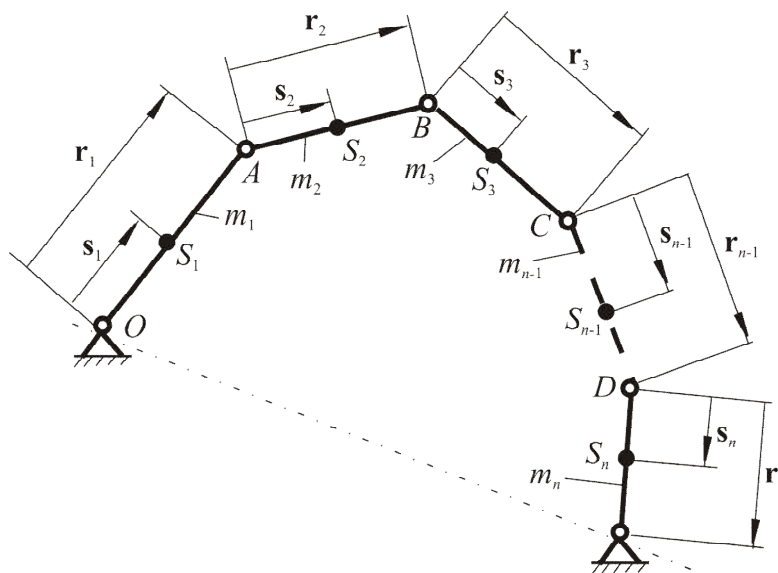
Agrártudományi Egyetem Gödöllő

Mg Géptani Intézet

A gyorsmozgású gépszerkezetek tervezésének fontos lépése az egyenletes, rezgésmentes üzemet biztosító kiegyensúlyozás. A szerző a mezőgazdasági gépeken gyakran előforduló síkbeli négytagú csuklós mechanizmusok kiegyensúlyozhatóságának kérdéseit vizsgálja. Az elméleti eredmények alkalmazási lehetőségét egy számpéldán mutatja be.

A kiegyensúlyozatlan karos szerkezetek mozgása közben a kinematikai párokat terhelő tehetetlenségi erők és nyomatékok lépnek fel. Ezek a szerkezetet és annak állványát rezgésbe hozzák, amely több szempontból is kedvezőtlen. A rezgések energiát emésztnek fel, ezért romlik a gép hatásfoka. A dinamikus igénybevételek pedig csökkentik a gépelemek élettartamát, vagyis időelőtti elhasználódást idéznek elő. E káros hatások a tehetetlenségi erők és nyomatékok teljes vagy részleges kiegyensúlyozásával kiküszöbölhetők, illetve csökkenthetők. Ha csak a zavaró tehetetlenségi erők eltűnéséről gondoskodunk, akkor statikus, ha a nyomatékokéról is, akkor dinamikus kiegyensúlyozásról beszélünk.

A statikus kiegyensúlyozás, vagyis a tömegerők eltűnésének a feltétele, hogy a mechanizmus súlypontjának gyorsulása a mechanizmus minden helyzetében nulla legyen. Ezt a feltételt általában csak a súlypont nyugalma biztosítja. Ezért az ismert statikus kiegyensúlyozási eljárások a súlypont helyzetét meghatározó összefüggésekből indulnak ki. A későbbi vizsgálatok megalkotására a továbbiakban a főponti módszerrel (Fischer-módszer) azonos eredményre vezető, de a megközelítés módját tekintve attól eltérő statikus eljárást ismerhetünk meg.



1. ábra.

A mechanizmusra ható tömegerők eredője nulla, ha a

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_{Si} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{a}_S$$

ahol: m_i – az i -dik tag tömege,

\mathbf{a}_{Si} – az i -dik tag súlypontjának a gyorsulása,

\mathbf{a}_S – a kinematikai lánc közös súlypontjának a gyorsulása,

n – a mozgó tagok száma.

Alkalmazzuk az (1) összefüggést az 1. ábra szerinti csuklós szerkezetre:

$$(2) \quad m_1 \mathbf{a}_{S1} + m_2 \mathbf{a}_{S2} + m_3 \mathbf{a}_{S3} + \dots + m_{n-1} \mathbf{a}_{S_{n-1}} + m_n \mathbf{a}_{Sn}$$

A súlypontok gyorsulásai kifejezhetők az A, B, C stb. kinematikai párok abszolút és relatív gyorsulásaival:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{S1} &= \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{r}_1} \mathbf{a}_A \\ \mathbf{a}_{S2} &= \mathbf{a}_A + \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{a}_{BA} \\ \mathbf{a}_{S3} &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} + \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} \mathbf{a}_{CB} \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{S_{n-1}} &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} + \mathbf{a}_{CB} + \dots + \frac{\mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{r}_{n-1}} \mathbf{a}_{DC} \\ \mathbf{a}_{Sn} &= \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} + \mathbf{a}_{CB} + \dots + \mathbf{a}_{DC}). \end{aligned}$$

Itt \mathbf{s}_i – balról jobbra haladva az i -dik tag kezdőpontjából a súlypontjába, \mathbf{r}_i – az i -dik tag kezdőpontjából a végpontjába mutató vektorokat jelöli.

A súlypontok gyorsulásait a (2)-be helyettesítve, majd rendezve a következő összefüggést kapjuk:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\mathbf{a}_A \left[m_1 \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{r}_1} + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ &\mathbf{a}_{BA} \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ &\mathbf{a}_{CB} \left[m_3 \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] + \\ &\mathbf{a}_{DC} \left[m_{n-1} \frac{\mathbf{s}_{n-1}}{\mathbf{r}_{n-1}} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

amelynek triviális megoldásából a tömegérők eltűnésének feltételeit kapjuk:

$$(5) \quad \begin{aligned} m_1 \mathbf{s}_1 &= - \left[m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_2 &= - \left[m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_2 \\ m_3 \mathbf{s}_3 &= - \left[m_4 + \dots + m_{n-1} + m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \right] \mathbf{r}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$m_{n-1} \mathbf{s}_{n-1} = -m_n \left(1 - \frac{\mathbf{s}_n}{\mathbf{r}_n} \right) \mathbf{r}_{n-1},$$

Mint látható n mozgó tag esetén $n-1$ egyenlet írható fel. A tagok méretei ($\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$) általában a kinematikai feltételek által determináltak, így a $2n$ számú paraméter ($\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ és m_1, m_2, \dots, m_n) közül $n-1$ -et számíthatunk, a többit előzetesen kell felvenni. Arra azonban vigyázni kell, hogy az önkényes előírások ne kerüljenek egymással ellentmondásba.

Az (5) egyenletrendszer teljesülése esetén a kinematikai lánc közös súlypontja az állványra, az *1. ábrán* *OE* egyenesre kerül, azaz $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$. Ennek bizonyítására írjuk fel az *1. ábrán* látható mechanizmusra a főponti módszernél alkalmazott és jól ismert súlypont-meghatározó összefüggést:

$$(6) \quad \mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_n = \frac{m_1 \mathbf{s}_1 + (m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n) \mathbf{r}_1}{\sum m_i} + \\ + \frac{m_2 \mathbf{s}_2 + (m_3 + \dots + m_{n-1} + m_n) \mathbf{r}_2}{\sum m_i} + \dots + \frac{m_n \mathbf{s}_n}{\sum m_i}$$

ahol $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$ az ún. fővektorok.

Legyen $\mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n$ ekkor az (5) egyenletrendszer alapján az $\mathbf{s}_{n-1} = \mathbf{0}$, mivel $m_{n-1} \neq 0$, továbbá az

$$(7) \quad \begin{aligned} m_1 \mathbf{s}_1 &= -(m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1}) \mathbf{r}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_2 &= -(m_3 + \dots + m_{n-1}) \mathbf{r}_2 \\ &\vdots \\ m_n \mathbf{s}_n &= m_n \mathbf{r}_{n-1}, \end{aligned}$$

Ezeket (6)-ba behelyettesítve, az

$$(8) \quad \mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{h}_n = \frac{m_n \mathbf{r}_1}{\sum m_i} + \frac{m_n \mathbf{r}_2}{\sum m_i} + \dots + \frac{m_n \mathbf{r}_n}{\sum m_i}$$

Csuklós mechanizmusoknál a közös súlypont az állványon, illetve esetünkben az *OE* egyenesen helyezkedik el, ha a fővektorok alkotta vektorsokszög hasonló a mechanizmus tagjai által alkotott alakzathoz. Ezt a

$$(9) \quad \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{r}_2} = \dots = \frac{\mathbf{h}_n}{\mathbf{r}_n}$$

feltétel biztosítja, ami esetünkben fennáll, hiszen

$$(10) \quad \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{r}_2} = \dots = \frac{\mathbf{h}_n}{\mathbf{r}_n} = \frac{m_n}{\sum m_i}$$

A bemutatott eljárás tehát egyenértékű a főponti módszerrel, csak közelítési módjában különbözik attól. Kellemeesebb azonban, különösen részleges kiegyensúlyozásnál, hogy itt a tömeg-erőkkel dolgozunk, ami munkánkat szemléletesebbé teszi. A (4) összefüggésből közvetlen kiolvasható, hogy a tömeg-erőket milyen irányokban ellensúlyoztuk. A szemléletességen túl, mint azt a későbbiekben látni fogjuk, az eljárás legnagyobb előnye abban rejlik, hogy össze-

kapcsolható a dinamikus kiegyensúlyozással, vagyis a tömegerők kiküszöbölésével egyidejűleg a tehetetlenségi nyomatékok okozta kedvezőtlen hatásokat is mérsékelhetjük.

A továbbiakban a fent ismertetett módszer felhasználásával vizsgáljuk a négytagú csuklós mechanizmusok kiegyensúlyozásának kérdéseit.

Tekintsük a 2. ábrán vázolt négytagú csuklós mechanizmust. A hajtótág szögsebességét – a gyakorlati eseteknek megfelelően – állandónak választjuk. Az ábrán S_1 , S_2 , S_3 a súlypontokat, K_1 az O pontra, K_2 az A pontra és K_3 a C pontra vonatkoztatott lengésközéppontokat jelöli.

A tehetetlenségi erők eltűnését biztosító egyenleteket az (5) felhasználásával közvetlen felírhatjuk:

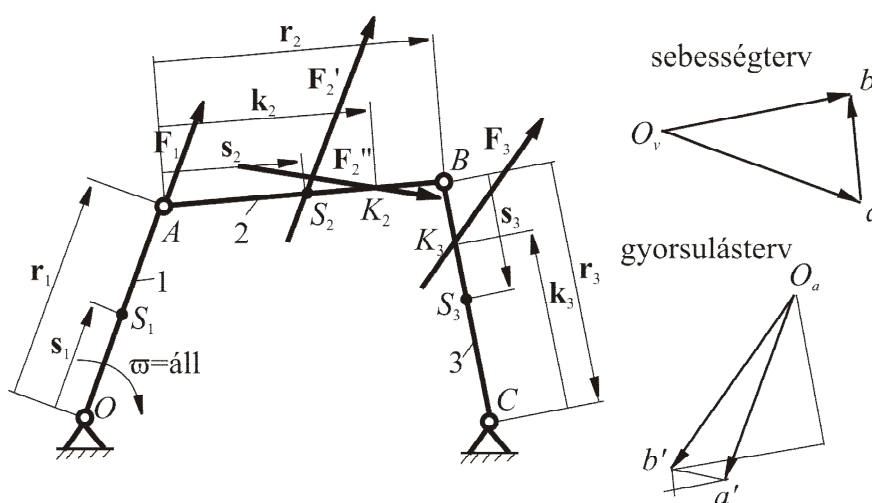
$$(11) \quad m_1 \mathbf{s}_1 = - \left[m_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} \right) \right] \mathbf{r}_1$$

$$(12) \quad m_2 \mathbf{s}_2 = - m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3} \right) \mathbf{r}_2$$

A dinamikus kiegyensúlyozás a (11) és (12) egyenletekben megfogalmazott feltételeken kívül megkívánja a tehetetlenségi nyomatékok eliminálását is, azaz a

$$\sum \mathbf{M}_i = 0$$

feltétel teljesülését.



2. ábra.

Az állandó szögsebességgel hajtott forgattyúra a súlypontba (S_1) koncentrálható $\mathbf{F}_1 = -m_1 \mathbf{a}_{S1}$ tömegerő hat, ami a centrifugális erővel egyenlő (2. ábra). A hajtórúdon a haladó mozgásból adódó és az S_2 tömegközéppontban ható $\mathbf{F}_2' = -m_2 \mathbf{a}_A$ erő mellett a K_2 lengésközéppontban a forgó mozgásból származó $\mathbf{F}_2'' = -m_2 \mathbf{a}_{S2A}$ erő is fellép. A forgó mozgást végző 3-as jelű tagon pedig a K_3 pontban működik az $\mathbf{F}_3 = -m_3 \mathbf{a}_{S3}$ nagyságú tehetetlenségi erő. (A 2. ábrán megrajzoltuk a mechanizmus vázolt helyzetéhez tartozó sebesség- és gyorsulástervet is. A gyorsulásterv a tehetetlenségi erők irányát és értelmét egyértelműen meghatározza.)

Az erők és azok támadáspontjainak ismeretében az O pontra írható nyomatéki egyenlet:

$$(13) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{F}_2' + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{F}_2'' + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times \mathbf{F}_3,$$

amelybe az erők értékét beírva a

$$(14) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = -m_2[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{a}_A] - m_2[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{a}_{S2A}] - m_3[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times \mathbf{a}_{S3}].$$

Az $\mathbf{a}_{S2A} = \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{a}_{BA}$ összefüggést, valamint a (3) utolsó sorát felhasználva, a

$$(15) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = -m_2[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2) \times \mathbf{a}_A] - m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2) \times \mathbf{a}_{BA}] - \\ - m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \times (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA})]$$

Rendezzük az egyenletet

$$(16) \quad \sum \mathbf{M}_i = 0 = - \left[m_2 \mathbf{s}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) \mathbf{r}_2 \right] \times \mathbf{a}_A - \\ - \left[m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) (\mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) \right] \times \mathbf{a}_A - \\ - \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{r}_1 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) \mathbf{r}_1 \right] \times \mathbf{a}_{BA} - \\ - \left[m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{k}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) \mathbf{r}_2 \right] \times \mathbf{a}_{BA} - \\ - \left[m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) (\mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_3) \right] \times \mathbf{a}_{BA} = 0.$$

A (16) egyenlet triviális megoldását biztosító egyenletrendszer:

$$(17) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) = 0,$$

$$(18) \quad m_2 \frac{\mathbf{s}_2}{\mathbf{r}_2} \mathbf{k}_2 + m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) \mathbf{r}_2 = 0,$$

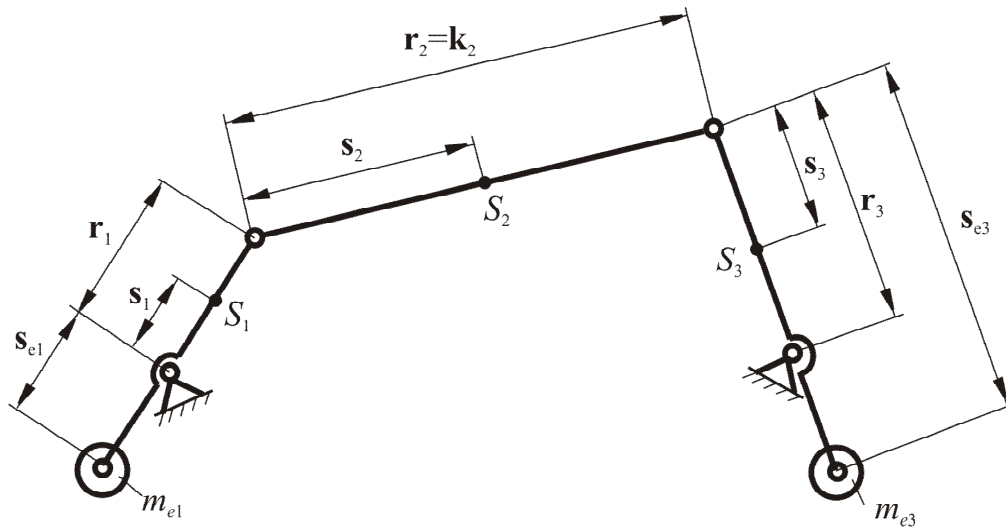
$$(19) \quad m_3 \left(1 - \frac{\mathbf{s}_3}{\mathbf{r}_3}\right) (\mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_3) = 0.$$

Mint látható a (17) azonos (12)-vel, vagyis a dinamikus kiegyensúlyozáshoz a (11), (17), (18) és (19) egyenleteket kell kielégíteni.

Kérdés azonban, hogy az egyenletrendszer egyidejűleg kielégíthető-e? A (19) kifejezés baloldala, mivel $m_3 \neq 0$ csak akkor lehet nulla, ha $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$ és $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{k}_3$, ezért az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását az $\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3$ és $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{k}_3$ választással kaphatjuk, ami azt jelenti, hogy a 3-as tag súlypontját a C pontba, a C pontra vonatkoztatott lengésközéppont (K_3) pedig a B pontba helyezzük. Ekkor a (17) és a (18) megoldásából, mivel $m_2 > 0$ és $\mathbf{r}_2 > 0$, az $\mathbf{s}_2 = 0$ következik, vagyis a 2-es tag súlypontját az A pontba kell vinni. Végül a (11)-ből $m_1 \mathbf{s}_1 + m_2 \mathbf{r}_1 = 0$ egyenletet kapjuk.

Megjegyezzük a módszer forgattyús hajtóműnél is alkalmazható, és az előzőekhez hasonló eredményekre vezet. Ezt azonban itt nem részletezzük, helyette az eljárás alkalmazási lehetőségét egy egyszerű példán mutatjuk be. Az eljárást alkalmazzuk a 3. ábrán látható mechanizmuson. A 3. ábra szerinti mechanizmus adatai a következők: $\mathbf{r}_1 = 120$ mm, $\mathbf{s}_1 = 75$ mm,

$m_1=0,1$ kg, $s_{e1}=-100$ mm, $r_2=400$ mm, $s_2=200$ mm, $m_2=0,8$ kg, $s_{e2}=-100$ mm, $r_3=280$ mm, $s_3=180$ mm, $m_3=0,4$ kg és $s_{e3}=350$ mm. Határozzuk meg az m_{e1} , m_{e2} és az m_{e3} ellensúlyok tömegét.



3. ábra.

A megoldáshoz a levezetett feltételek mellett felhasználjuk az

$$m'_1 = m_1 + m_{e1}, \quad m'_2 = m_2 + m_{e2}, \quad m'_3 = m_3 + m_{e3},$$

$$m'_1 s'_1 = m_1 s_1 + m_{e1} s_{e1}, \quad m'_2 s'_2 = m_2 s_2 + m_{e2} s_{e2}, \quad m'_3 s'_3 = m_3 s_3 + m_{e3} s_{e3},$$

összefüggéseket is, ahol a vesszővel jelölt mennyiségek a kiegyensúlyozás utáni tömegeket, illetve súlypontok helyeit jelentik.

Az $s_3=r_3$ választást az $m'_3 s'_3 = m_3 s_3 + m_{e3} s_{e3}$ -ba helyettesítve, az

$$(m_3 + m_{e3}) r_3 = m_3 s_3 + m_{e3} s_{e3},$$

ezt rendezve, az

$$m_{e3} = m_3 \frac{s_3 - r_3}{r_3 - s_{e3}} = 0,4 \frac{180 - 250}{280 - 350} = 0,57 \text{ kg.}$$

Az $s'_2 = 0$ feltételből, valamint az $m'_2 s'_2 = m_2 s_2 + m_{e2} s_{e2}$ összefüggésből az

$$m_2 s_2 + m_{e2} s_{e2} = 0,$$

illetve az

$$m_{e2} = -\frac{m_2 s_2}{s_{e2}} = -\frac{0,8 \cdot 200}{-100} = 1,6 \text{ kg.}$$

A 2-es tag új tömege:

$$m'_2 = m_2 + m_{e2} = 0,8 + 1,6 = 2,4 \text{ kg.}$$

Végül a 3-as tagon elhelyezendő ellensúly tömegét az $m'_1 s'_1 + m'_2 r_1 = 0$ egyenletből számíthatjuk ki. Helyettesítés után az

$$m_1 s_1 + m_{e1} s_{e1} + m'_2 r_1 = 0,$$

amelyből az

$$m_{e1} = - \frac{m'_2 \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_{e1}} = - \frac{2,4 \cdot 120 + 0,1 \cdot 1,75}{-100} = 2,995 \text{ kg.}$$

Mint látható az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazása – a statikus kiegyensúlyozáshoz viszonyítva – különösebb problémát nem vet fel, hiszen ugyanazokat az összefüggéseket használjuk fel. Kööttséget csupán az $\mathbf{s}_2=0$, $\mathbf{s}_3=\mathbf{r}_3$ és $\mathbf{r}_3=-\mathbf{k}_3$ előírások jelentenek, ami a gyakorlati esetek többségénél megvalósítható, sőt gyakran a szerkezetek tömegeloszlása kínálja e lehetőség kiaknázását.

IRODALOM

Buzás L.: Mechanizmusok elmélete. Budapesti Műszaki Egyetem, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Koltai J., Véner I.: Mechanizmusok. Agrártudományi Egyetem Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar, Gödöllő, 1978.

Soós P., Koltai J., Fábián L.: Mechanizmusok. Agrártudományi Egyetem, Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar, Budapest, 1968.

Terplán Z.: Mechanizmusok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.

Publikálva: Járművek, Mezőgazdasági Gépek 28. évfolyam 1981. 11. szám.